Aproksymacja funkcji dwóch zmiennych

Kamil Korolkiewicz

18 listopada 2009

Temat:

> Aproksymacja średniokwadratowa ciągła w obszarze $[0, 1] \times [0, 1]$ w bazie funkcji $1, x, y, xy$. Całkowanie złożonymi formułami trapezów ze względu na każdą zmienną. Tablicowanie funkcji, przybliżenia i błędu.

Opis metody

Wstęp

Zadanie aproksymacji polega na przybliżaniu danej funkcji inną funkcją, zazwyczaj "prostrzą" w swojej postaci. W naszym przypadku będzie to wielomian w postaci $f^*(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$ (baza $1, x, y, xy$).

Zadanie aproksymacji

V - przestrzeń unitarna (rzeczywista) z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot) \to \mathbb{R}$ (normę definiujemy przez $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$)

$V \supset U$ - podprzestrzeń liniowa, $\dim U = n$

Zadanie aproksymacji: dla $f \in V$ poszukujemy $f^* \subset U$, że

$\| f - f^* \| = \inf_{g \subset U} \| f - g \|$

Ponadto zachodzi twierdzenie, które mówi że powyższe zadanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie (optymalne) oraz $(f - f^*, g) = 0$ dla każdego $g \subset U$.

Wyznaczanie f^*

Skoro $(f - f^*, g) = 0$ dla każdego $g \subset U$ zatem także $(f - f^*, g_i) = 0$ dla $i = 1, ..., n$

Zgodnie z podaną w treści zadania bazą przestrzeni U:

$g_0 = 1, g_1 = x, g_2 = y, g_3 = xy$

Natomiast szukane $f^* = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i g_i$

Współczynniki α_i wyznaczamy z równań

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i * (g_i, g_j) = (f, g_j) \qquad , j = 0, 1, 2, 3$$

Inaczej mówiąc, należy rozwiązać równanie macierzowe $G\alpha = b$, gdzie

$$G = \{(g_i, g_j)\}_{i,j=0}^{3}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} (f, g_0) \\ (f, g_1) \\ (f, g_2) \\ (f, g_3) \end{bmatrix}$$

G jest macierzą Grama, posiada własność $G = G^T > 0$

Musimy jeszcze obliczać iloczyn skalarny. W przypadku interpolacji średniokwadratowej ciągłej jesteśmy w przestrzeni wielomianów ortogonalnych; $V = L_p^2(a, b)$.

Iloczyn skalarny definiujemy w ten sposób:

$$(f, g) = \int_a^b p(t) f(t) g(t) dt$$

$p(t)$ jest funkcją wagową i rozwiązaniu przyjmujemy, że $p(t) = 1$.

W naszym przypadku $t = (x, y)$ oraz $(a, b) = (0, 1)$, zatem

$$(f, g) = \int_0^1 \int_1^1 f(x, y) g(x, y) dx dy$$

Pozostaje wyznaczyć G, G^{-1}, b,α oraz f^*.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -24 & -24 & 36 \\ -24 & 48 & 36 & -72 \\ -24 & 36 & 48 & -72 \\ 36 & -72 & -72 & 144 \end{bmatrix}$$

Macierz b obliczana jest za pomocą metody złożonych formuł trapezów (w celu obliczenia całki z definicji iloczynu skalarnego):

$$(f, g_i) = \int_0^1 \int_1^1 f(x,y) g_i(x,y) dxdy \qquad , i = 0, 1, 2, 3$$

Następnie mamy $\alpha = G^{-1}b$ oraz $f^*(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i g_i(x,y)$.

Przykłady

1.
$f(x,y) = 2 + 0.2x - y + 3xy$
m=25
n=4

x	y	f	f^*	Bł. bezwzgl.	Bł. wzgl.
0.000000	0.000000	2.000000	2.001398	-0.001398	-0.000699
0.333333	0.000000	2.066667	2.066554	0.000113	0.000055
0.666667	0.000000	2.133333	2.131710	0.001623	0.000761
1.000000	0.000000	2.200000	2.196866	0.003134	0.001425
0.000000	0.333333	1.666667	1.665165	0.001502	0.000901
0.333333	0.333333	2.066667	2.065973	0.000693	0.000336
0.666667	0.333333	2.466667	2.466781	-0.000115	-0.000047
1.000000	0.333333	2.866667	2.867590	-0.000923	-0.000322
0.000000	0.666667	1.333333	1.328932	0.004401	0.003301
0.333333	0.666667	2.066667	2.065393	0.001274	0.000617
0.666667	0.666667	2.800000	2.801853	-0.001853	-0.000662
1.000000	0.666667	3.533333	3.538313	-0.004980	-0.001409
0.000000	1.000000	1.000000	0.992699	0.007301	0.007301
0.333333	1.000000	2.066667	2.064812	0.001855	0.000898
0.666667	1.000000	3.133333	3.136924	-0.003591	-0.001146
1.000000	1.000000	4.200000	4.209037	-0.009037	-0.002152

Błąd wynika z niedokładności całkowania. Gdybyśmy zastosowali np. złożone formuły Simpsona, to otrzymane przybliżenia byłyby dokładnie równe funkcji f.

2.
$f(x,y) = 0.1\sin(10\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2})$
m=40
n=4

x	y	f	f^*	Bł. bezwzgl.	Bł. wzgl.
0.000000	0.000000	0.070886	-0.026640	0.097526	1.375811
0.333333	0.000000	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.666667	0.000000	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
1.000000	0.000000	0.070886	-0.026640	0.097526	1.375811
0.000000	0.333333	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.333333	0.333333	0.070652	-0.026640	0.097292	1.377056
0.666667	0.333333	0.070652	-0.026640	0.097292	1.377056
1.000000	0.333333	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.000000	0.666667	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.333333	0.666667	0.070652	-0.026640	0.097292	1.377056
0.666667	0.666667	0.070652	-0.026640	0.097292	1.377056
1.000000	0.666667	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.000000	1.000000	0.070886	-0.026640	0.097526	1.375811
0.333333	1.000000	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
0.666667	1.000000	-0.084828	-0.026640	-0.058188	0.685954
1.000000	1.000000	0.070886	-0.026640	0.097526	1.375811

Zatem f^*jest funkcją stałą.

3.

$f(x,y) = 0.1\sin(10\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}) + xy$
m=40
n=4

x	y	f	f^*	Bł. bezwzgl.	Bł. wzgl.
0.000000	0.000000	0.070886	-0.026639	0.097526	1.375805
0.333333	0.000000	-0.084828	-0.026859	-0.057969	0.683372
0.666667	0.000000	-0.084828	-0.027078	-0.057749	0.680785
1.000000	0.000000	0.070886	-0.027298	0.098184	1.385092
0.000000	0.333333	-0.084828	-0.026859	-0.057969	0.683372
0.333333	0.333333	0.181763	0.084325	0.097438	0.536071
0.666667	0.333333	0.292874	0.195509	0.097365	0.332446
1.000000	0.333333	0.248506	0.306693	-0.058188	-0.234150
0.000000	0.666667	-0.084828	-0.027078	-0.057749	0.680785
0.333333	0.666667	0.292874	0.195509	0.097365	0.332446
0.666667	0.666667	0.515097	0.418097	0.097000	0.188314
1.000000	0.666667	0.581839	0.640684	-0.058845	-0.101137
0.000000	1.000000	0.070886	-0.027298	0.098184	1.385092
0.333333	1.000000	0.248506	0.306693	-0.058188	-0.234150
0.666667	1.000000	0.581839	0.640684	-0.058845	-0.101137
1.000000	1.000000	1.070886	0.974676	0.096211	0.089842

Można zauważyć, że błąd bezwzględny jest podobny jak w poprzednim przykładzie.