Całkowanie funkcji dwóch zmiennych - sprawozdanie

Kamil Korolkiewicz

25 października 2009

Temat nr 14:

> Obliczanie całek $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$ złożonymi kwadraturami Simpsona ze względu na każdą zmienną.

Opis metody

Dany jest obszar - prostokąt $[a,b] \times [c,d]$. Dzielimy go na n^2 prostokątów, gdzie każdy ma boki o wymiarach $h_x = \frac{b-a}{n}$ oraz $h_y = \frac{d-c}{n}$.

Naszym zadaniem jest obliczyć całkę$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$. Dla każdego prostokąta z naszego podziału obszaru będziemy obliczać całkę kwadraturą Simpsona. Wynikiem będzie suma wartości wszystkich takich całek.

Niech $x_0 = a + h_x * k$ i $y_0 = c + h_y * l \quad k, l = 0 \ldots n-1$

$$A_0 = A_2 = h_x/6$$

$$A_1 = 4 * h_x/6$$

$$B_0 = B_2 = h_y/6$$

$$B_1 = 4 * h_y/6$$

oraz $x_1 = x_0 + h_x/2$, $x_2 = x_0 + h_x$ i analogicznie $y_1 = y_0 + h_y/2$, $y_2 = y_0 + h_y$

Mamy już 9 kluczowych punktów na prostokącie oraz współczynniki dla wzoru Simpsona. Przybliżoną wartość całki obliczamy wzorem:

$$Q(f_{k,l}) = \sum_{i=0}^{2} A_i * \sum_{j=0}^{2} B_j f(x_i, y_j)$$

Jest to podwójne zastosowanie wzoru Simpsona - najpierw dla zmiennej y, a następnie dla zmiennej x.

Wynikiem jest:

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} Q(f_{k,l})$$

Zatem:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = Q(f) + R(f)$$

Gdzie $R(f)$ jest resztą kwadratury $Q(f)$.

Przykłady

1.

$f(x,y) = sin\sqrt{x^2+y^2}+1$
Obszar:$[-10,10] \times [-10,10]$

n	Wartość kwadratury	Różnica wartości
1	347,72903166954	-
2	352,427746453287	4,69871478374762
3	430,649554201599	78,2218077483116
4	421,500580684252	-9,14897351734697
5	389,514679662869	-31,9859010213827
10	396,361949778882	6,84727011601331
20	396,174976337551	-0,186973441331872
30	396,161571661316	-0,0134046762348135
40	396,158593981934	-0,00297767938155857
50	396,157577415459	-0,00101656647552772
60	396,157138822956	-0,000438592502291613
70	396,156919222952	-0,000219600004811582
80	396,156797285668	-0,000121937283552143
90	396,156724212255	-7,30734130911515E-05
100	396,156677778176	-4,64340790813367E-05
200	396,156569794605	-0,000107983570785564
300	396,156559123576	-1,06710290879164E-05
400	396,156556540858	-2,58271819575384E-06
500	396,156555623795	-9,17062436656124E-07
600	396,156555219139	-4,04656248065294E-07
700	396,156555013665	-2,05473895675823E-07
800	396,156554898325	-1,15339901185507E-07

2.

$f(x,y) = 0.5(1+sin\sqrt{(2sin(4x)+2.1cos(y))^2+(3cos(3y-sin(3x))-2sin(3x+cos(y)))^2})$
Obszar:$[-2,2]\ \times\ [-2,2]$

n	Wartość kwadratury	Różnica wartości
1	8,25666030918899	-
2	7,43971038077421	-0,816949928414773
3	8,47187621209504	1,03216583132082
4	8,36409136817345	-0,107784843921587
5	8,92077358564278	0,556682217469334
10	8,67749320349055	-0,243280382152234
20	8,72942877850745	0,0519355750169002
30	8,72860845792653	-0,000820320580919187
40	8,72691406360655	-0,00169439431997986
50	8,72693063422674	1,65706201844529E-05
60	8,72682013842848	-0,000110495798253396
70	8,7267844516389	-3,56867895856539E-05
80	8,72676935008164	-1,51015572527058E-05
90	8,72680853297301	3,91828913635095E-05
100	8,72676404255612	-4,4490416891918E-05
200	8,72676686225423	2,81969811410931E-06
300	8,72676722243782	3,60183593173247E-07
400	8,72676765946747	4,37029642696984E-07
500	8,72676777185198	1,12384515915664E-07
600	8,72676778656539	1,47134109340641E-08
700	8,72676768248554	-1,0407985584493E-07
800	8,7267676387193	-4,37662350805113E-08

3.

f(x,y)=$x^3-0.5y^3$
Obszar:$[-0.34,1.23]\ \times\ [0.43,1.55]$
dla $n=20$:
$Q(f) = -0,4889059756$