

# Interpolacja funkcji dwóch zmiennych na trójkącie

Kamil Korolkiewicz, grupa U1

October 19, 2009

## Temat 14:

Interpolacja funkcjami kwadratowymi na trójkącie podzielonym na  $n^2$  trójkątów przystających. Tablicowanie funkcji, przybliżenia i błędu w środkach ciężkości trójkątów.

## Opis metody

Należy zbudować wielomian  $w(x) \in P_2(D)$  ( $D$  - jakiś trójkąt) taki, że

$$w(p_i) = f(p_i) \quad i = 0, 1, \dots, 5$$

gdzie  $f \in C^3(D)$

Zaś  $p_i$  to jeden z sześciu punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

które stanowią wierzchołki trójkąta, oraz punkty środkowe jego krawędzi:

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right), \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right), \left(\frac{x_2 + x_0}{2}, \frac{y_2 + y_0}{2}\right)$$

Następnie tworzymy następujące funkcje

$$\varphi_0(x, y) = [(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1]/d$$

$$\varphi_1(x, y) = [(y_0 - y_2)x + (x_2 - x_0)y + x_0y_2 - y_0x_2]/d$$

$$\varphi_2(x, y) = [(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + x_1y_0 - y_1x_0]/d$$

$$d = (x_1 - x_2)(y_0 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_0 - x_2)$$

dla których zachodzi:

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$$

Następnie tworzymy następujące funkcje

$$\psi_i(x, y) = \varphi_i(x, y)(2\varphi_i(x, y) - 1)$$

$$\text{dla } i = 0, 1, 2$$

oraz

$$\psi_3(x, y) = 4\varphi_0(x, y)\varphi_1(x, y)$$

$$\psi_4(x, y) = 4\varphi_0(x, y)\varphi_2(x, y)$$

$$\psi_5(x, y) = 4\varphi_1(x, y)\varphi_2(x, y)$$

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwany wielomian interpolacyjny

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^5 f(p_i)\psi_i(p_i)$$

Błąd interpolacji:

$$\|f - w\| \leq C * h^3$$

gdzie  $h$  to miara najdłuższego boku trójkąta  $D$

W zadaniu dzielimy duży (wejściowy, o podanych współrzędnych) trójkąt na  $n^2$  trójkątów przystających (każdy mały trójkąt jest  $n$  razy mniejszy od dużego). Dla każdego z nich wyznaczamy jego środek ciężkości (zakładamy, że ma on współrzędne  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ):

$$S = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Tworzymy nasz wielomian  $w(x, y)$  w przedstawiony wyżej sposób, i obliczamy kolejno:

$$f(S), w(S), f(S) - w(S), \frac{f(S) - w(S)}{f(S)}$$

Wyniki są dla każdego trójkąta tablicowane i wyświetlane w programie.

## Program interpolacja\_na\_trojkatkach.exe

Program oferuje intuicyjny interfejs. Dane podajemy w polach edycji i klikamy na Wynik. Dostępny jest także tryb wizualizacji, który umożliwia obejrzenie wyników w graficznej postaci - interpolowane punkty w przestrzeni 3D (kamerą sterujemy używając myszy i przycisków). Możemy wyświetlać zarówno punkty  $f(x,y)$  (kolor biały),  $w(x,y)$  (kolor czerwony), a także błąd bezwzględny i względny (kolor niebieski i zielony).

### Przykłady

#### Przykład 1

**Dane:**

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

$$A = (-3, -2); B = (8, 0); C = (3, 5)$$

$$n = 5$$

**Wynik:**

	x	y	f(x,y)	w(x,y)	Błąd bezwzg.	Błąd wzgl.
0	-1.866667	-1.400000	-0.786582	-0.768153	-0.018428	0.023428
1	0.333333	-1.000000	0.867497	0.863961	0.003536	0.004076
2	2.533333	-0.600000	1.396775	1.399192	-0.002416	-0.001730
3	4.733333	-0.200000	-0.019714	-0.010390	-0.009325	0.472987
4	6.933333	0.200000	1.585371	1.571199	0.014172	0.008939
5	-0.733333	-0.800000	0.027357	0.031652	-0.004295	-0.157013
6	1.466667	-0.400000	1.915644	1.901924	0.013720	0.007162
7	3.666667	-0.000000	0.498723	0.496373	0.002350	0.004712
8	5.866667	0.400000	0.516482	0.527432	-0.010951	-0.021202
9	-0.666667	-0.000000	0.381630	0.380912	0.000718	0.001882
10	1.533333	0.400000	1.920359	1.905713	0.014646	0.007627
11	3.733333	0.800000	0.138900	0.142654	-0.003753	-0.027022
12	5.933333	1.200000	0.019599	0.009199	0.010400	0.530652
13	0.466667	0.600000	1.275247	1.279295	-0.004048	-0.003174
14	2.666667	1.000000	0.997575	0.993122	0.004453	0.004464
15	4.866667	1.400000	-0.818156	-0.800279	-0.017877	0.021850
16	0.533333	1.400000	0.678374	0.660131	0.018243	0.026893
17	2.733333	1.800000	0.169810	0.164542	0.005269	0.031026
18	4.933333	2.200000	-1.564192	-1.561259	-0.002933	0.001875
19	1.666667	2.000000	0.579261	0.576799	0.002462	0.004250
20	3.866667	2.400000	-1.400585	-1.392218	-0.008367	0.005974
21	1.733333	2.800000	0.044598	0.035151	0.009447	0.211820
22	3.933333	3.200000	-1.709872	-1.696302	-0.013570	0.007936
23	2.866667	3.400000	-0.695322	-0.704158	0.008835	-0.012707
24	2.933333	4.200000	-0.283504	-0.271773	-0.011730	0.041377

**Przykład 2**

**Dane:**

$$f(x, y) = 2e^{-x^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A = (-5, -5); B = (5, -5); C = (0, 10)$$

$$n = 5$$

**Wynik:**

	x	y	f(x,y)	w(x,y)	Błąd bezwzg.	Błąd wzgl.
0	-4.000000	-4.000000	-0.000000	0.000008	-0.000008	60.766761
1	-2.000000	-4.000000	-0.035579	0.002262	-0.037841	1.063584
2	0.000000	-4.000000	-1.513605	-1.434437	-0.079168	0.052304
3	2.000000	-4.000000	-0.035579	0.002262	-0.037841	1.063584
4	4.000000	-4.000000	-0.000000	0.000008	-0.000008	60.766761
5	-3.000000	-3.000000	-0.000220	-0.002868	0.002648	-12.031406
6	-1.000000	-3.000000	-0.015218	-0.193953	0.178735	-11.744922
7	1.000000	-3.000000	-0.015218	-0.193953	0.178735	-11.744922
8	3.000000	-3.000000	-0.000220	-0.002868	0.002648	-12.031406
9	-3.000000	-1.000000	-0.000005	-0.000346	0.000341	-66.846824
10	-1.000000	-1.000000	0.726758	0.516605	0.210153	0.289165
11	1.000000	-1.000000	0.726758	0.516605	0.210153	0.289165
12	3.000000	-1.000000	-0.000005	-0.000346	0.000341	-66.846824
13	-2.000000	0.000000	0.033309	0.025445	0.007863	0.236074
14	0.000000	0.000000	0.000000	1.283851	-1.283851	-1.#INF00
15	2.000000	0.000000	0.033309	0.025445	0.007863	0.236074
16	-2.000000	2.000000	0.011285	-0.043643	0.054928	4.867285
17	0.000000	2.000000	1.818595	1.527347	0.291248	0.160150
18	2.000000	2.000000	0.011285	-0.043643	0.054928	4.867285
19	-1.000000	3.000000	-0.015218	0.226882	-0.242100	15.908691
20	1.000000	3.000000	-0.015218	0.226882	-0.242100	15.908691
21	-1.000000	5.000000	-0.681449	-0.686365	0.004916	-0.007214
22	1.000000	5.000000	-0.681449	-0.686365	0.004916	-0.007214
23	0.000000	6.000000	-0.558831	-0.318076	-0.240755	0.430819
24	0.000000	8.000000	1.978716	1.682149	0.296568	0.149879